

球壳内力校核

崔景浩 王作垣

(清华大学土木系地下建筑教研组)

提 要

许多储油装置的顶和底，都是轴对称球壳结构。按有矩理论计算由于计算较复杂，得到的内力往往容易出错，因而必须进行内力校核。本文取一个有限隔离体，根据平衡条件，推导了径向力、环向力、横剪力以及径向弯矩的校核公式，并附算例。

ABSTRACT

The top and bottom of many oil storage tanks are of spherical structure that is axially symmetrical. The calculation is so complex as it is done according to torque principle that the inner stress acquired is often vulnerable to mistakes, and therefore must be checked. This paper, taking a definite free body and based on balance conditions, infers the checking equations for calculating radial force, circumference force, transverse shear force as well as radial torque, and gives an example of calculation.

一、前 言

关于壳体的内力校核，在许多壳体专著中都未论及，然而在实际工程设计中内力校核却至关重要。这是由于壳体内力计算很复杂，随便哪一个环节都有可能出错，因而在解出内力之后，必须进行校核，以判断计算的正确性。

校核的方法，通常是取隔离体做平衡校核，这对于一般结构并没有什么困难，但对于壳体结构来说由于壳体的几何形体复杂，给校核工作带来一些麻烦。这里只探讨轴对称平衡校核问题。

最简单的内力校核，是将球壳沿环向线切开得一球冠，如图 1 所示，考虑内外力平衡，即 $\sum y = 0$ ，可得

$$2(T_n \sin \phi_n + Q_{\phi_n} \cos \phi_n) + q_y R \sin \phi_n = 0 \quad (1)$$

式(1)就是校核内力 T_ϕ 和 Q_ϕ 的平衡关系式。

然而对于径向弯矩 M_ϕ 及环向力 T_ϕ 却不能用这个隔离体靠 $\Sigma y = 0$ 得到校核,所以下面介绍一种比较全面的校核方法。

二、内力校核

自球壳由一对相邻的经线和纬线切取一块有限隔离体,如图2所示。由于问题是轴对称的,所以在截出的有限体上只作用有径向力 T_ϕ 、径向弯矩 M_ϕ 、径向切力 Q_ϕ 及环向力 T_θ ,其余的非对称内力均不出现。 P_x 、 P_y 分别代表作用在隔离体壳面外载的水平 and 竖向分量,各力的方向以图示为正。

为了简单,令上截面处的弧长 ds_0 等于单位弧长,亦即

$$ds_0 = r_0 d\theta = R \cdot \sin \phi_0 d\theta = 1 \quad (2)$$

$$\text{则 } d\theta = \frac{1}{R \cdot \sin \phi_0}$$

又知下截面弧长

$$ds_1 = r_n \cdot d\theta = R \cdot \sin \phi_n \cdot d\theta$$

代入(2)式,得

$$ds_n = \frac{\sin \phi_n}{\sin \phi_0} \quad (3)$$

1. 力平衡

下面依次考查图2中各力(包括内力和外力)在 x 方向和 y 方向的分量及其合力,并规定 N_x^T 、 N_y^T 、 N_x^Q 、 N_y^Q ……分别代表 T_ϕ 、 Q_ϕ ……在 x 、 y 方向上投影的总合力。

$$(1) \text{ 求 } N_x^T, N_y^T$$

如图3所示, T_ϕ 在自身径向截面内的水平投影为 $-T_{\phi_n} \cdot \cos \phi_n$,负号表示与规定的 x 正方向相反。

取积分参变量 α ,如图4所示。

在所截取的下断面上, T_{ϕ_n} 沿 x 方向的总合力应为:

$$N_x^T = -2 \int_0^{\frac{d\theta}{2}} T_{\phi_n} \cdot \cos \phi_n \cdot r_n \cdot d\alpha \cdot \cos \alpha$$

将 $r_n = R_n \cdot \sin \phi_n$ 代入积分,并考虑到(2)式,则

$$N_x^T = -2RT_{\phi_n} \cos \phi_n \cdot \sin \phi_n \cdot \sin \frac{1}{2R \cdot \sin \phi_0} \quad (4)$$

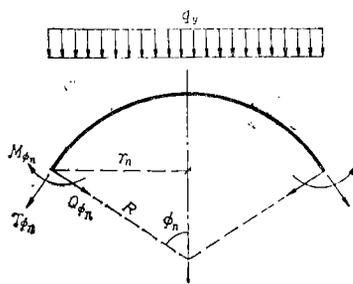


图 1

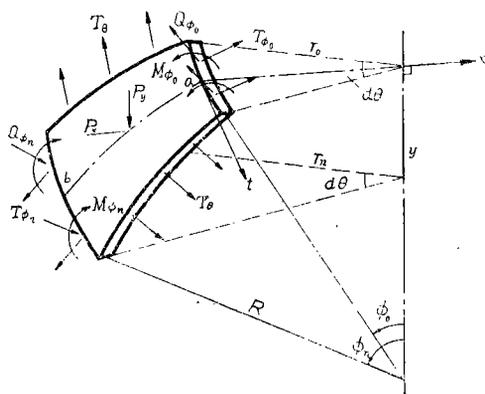


图 2

同样，上断面内力 Q_{ϕ_0} 沿 x 方向的合力应为：

$$\begin{aligned} N_x^{Q_{\phi_0}} &= -2 \int_0^{\frac{d\theta}{2}} R Q_{\phi_0} \cdot \sin^2 \phi_0 \cdot \cos \alpha da \\ &= -2 R Q_{\phi_0} \cdot \sin^2 \phi_0 \cdot \sin A \end{aligned} \quad (11)$$

切向力 Q_{ϕ} 在 x 方向投影的合力：

$$N_x^{Q_{\phi}} = 2R \cdot \sin A (Q_{\phi_n} \cdot \sin^2 \phi_n - Q_{\phi_0} \cdot \sin^2 \phi_0) \quad (12)$$

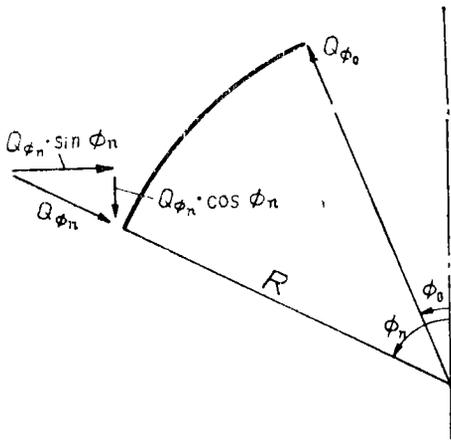


图 5

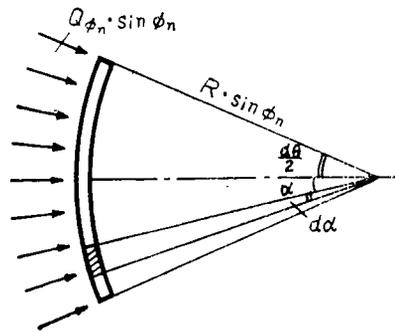


图 6

参照图 5 和图 6，并考虑到式 (2) 和式 (3)，可以写出 Q_{ϕ} 在 y 方向投影的合力为

$$N_y^{Q_{\phi}} = Q_{\phi_n} \cdot \cos \phi_n \cdot \frac{\sin \phi_n}{\sin \phi_0} - Q_{\phi_0} \cdot \cos \phi_0 \quad (13)$$

(3) 求 $N_x^{T_{\theta}}$ 及 $N_y^{T_{\theta}}$

内力 T_{θ} 在 x 方向的分量，如图 7 所示，可以表示为：

$$\begin{aligned} T_{0_m}^x &= 2T_{\theta_m} \cdot \sin \frac{d\theta}{2} \quad (14) \\ (m = 0, 1, 2 \dots n) \end{aligned}$$

内力 T_{θ} 沿经线是变化的。实际计算中，我们只求有限个分段点的数值，因此，我们采用Simpson的近似计算公式来求 T_{θ} 沿经向曲线在 x 方向的投影。按Simpson公式的规定，分割线段要成偶数(即 n 为偶数)。这只要在截取隔离体时注意这一要求就是了。

按照Simpson公式，所截取隔离体上内力 T_{θ} 在 x 方向上的总合力为：

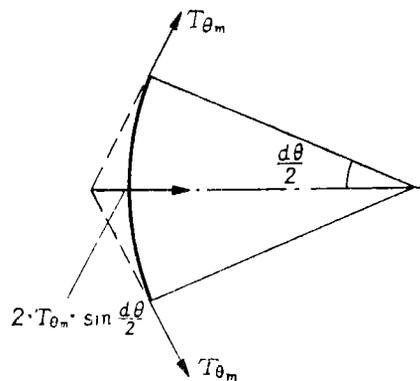


图 7

$$N_x^{T_{\theta}} = \frac{\Delta S}{3} (T_{\theta_0}^x + 4T_{\theta_1}^x + 2T_{\theta_2}^x + 4T_{\theta_3}^x + \dots + 2T_{\theta_{n-2}}^x + 4T_{\theta_{n-1}}^x + T_{\theta_n}^x) \quad (15)$$

其中 ΔS 为计算内力时划分的弧长。

将 (14) 式代入并考虑到 (2) 和 (5) 式, 则 (15) 式可写为:

$$N_x^{T\theta} = \frac{2}{3} \Delta S (T_{\theta_0} + 4T_{\theta_1} + 2T_{\theta_2} + 4T_{\theta_3} + \dots + 2T_{\theta_{n-2}} + 4T_{\theta_{n-1}} + T_{\theta_n}) \sin A \quad (16)$$

还可进一步缩写为:

$$N_x^{T\theta} = \frac{2}{3} \Delta S \left[T_{\theta_0} + T_{\theta_n} + 4T_{\theta_{n-1}} + 2 \sum_{m=1,3,5}^{n-3} (2T_{\theta_m} + T_{\theta_{m+1}}) \right] \cdot \sin A \quad (17)$$

由于壳体结构的内力总是在靠近边缘部分内力值变化剧烈, 因此, 在进行实际工程计算时, 划分线段往往边缘部分密一些, 而中间部分则疏一些, 并不是等分的, 这就给直接使用 Simpson 公式带来了困难。为此, 当计算内力划分的弧段不等分时, 建议按梯形法则求和,

即

$$N_x^{T\theta} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (T_{\theta_{m-1}}^x + T_{\theta_m}^x) \Delta S_m \quad (18)$$

其中 ΔS_m 如图 8 所示, 为自上截面算起的弧段, 将 (14) 式代入, 并考虑到 (2) 和 (5) 式则

(18) 式可写为:

$$N_x^{T\theta} = \sum_{m=1}^n (T_{\theta_{m-1}} + T_{\theta_m}) \Delta S_m \cdot \sin A \quad (19)$$

内力 T_{θ_m} 在 y 方向的分量为 0, 所以

$$N_y^{T\theta} = 0 \quad (20)$$

(4) 求 P_x 及 P_y

作用于球壳的轴对称荷载一般有两种: 其一是均布竖向荷载 (如土压 q_y , 见图 9 a); 其二是沿环向均布的径向荷载 (如水压 q , 计算时常假定整个壳面都是均匀分布, 见图 9 b)。

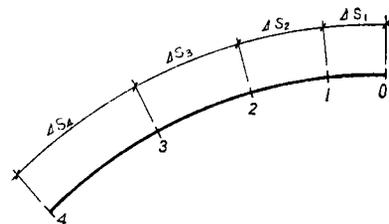


图 8

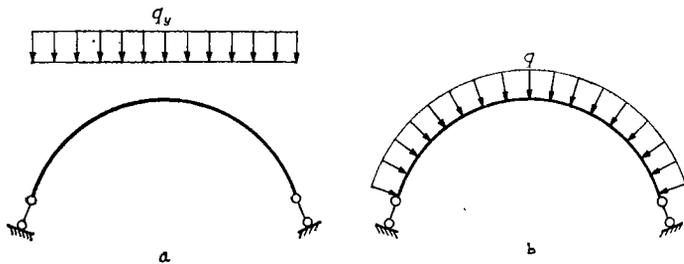


图 9

对于均布竖向荷载 q_y , 没有 x 方向的分量, 如图 10 所示, 只须做如下积分, 即可求得有限体上的竖向荷载总量 P_y :

$$P_y = \int_{\phi_0}^{\phi_n} q_y \cdot r_\phi \cdot d\phi \cdot R d\phi \quad (21)$$

将 $r_\phi = R \cdot \sin\phi$ 代入并积分, 同时考虑到 (2) 式可得:

$$P_y = \frac{Rq_y}{\sin\phi_0} (\cos\phi_0 - \cos\phi_n) \quad (22)$$

对于均布径向荷载, 由于壳面任一点径向荷载 q , 总可以分成竖向分量:

$$q_y = q \cdot \cos \phi \quad (23)$$

及水平分量:

$$q_r = q \cdot \sin \phi \quad (24)$$

将公式(23)代入(21)式, 考虑到(2)式并做积分, 即可求得竖向荷载总量:

$$\begin{aligned} P_y &= \int_{\phi_0}^{\phi_n} q \cos \phi \cdot r_\phi d\theta R d\phi \\ &= \frac{qR}{2 \sin \phi_0} (\sin^2 \phi_n - \sin^2 \phi_0) \quad (25) \end{aligned}$$

在有限体上 x 方向的荷载总量 P_x , 由径向荷载 q 的水平分量 q_r 组成, 如图11所示。设由一对相邻经线、一对相邻纬线切出壳面上的一微元 (画阴影线者), 其上作用的水平合分量为:

$$\bar{q}_r = q_r R d\phi r_\phi d\alpha \quad (26)$$

该力在 x 方向的投影应为:

$$\bar{q}_x = q_r R d\phi r_\phi d\alpha \cdot \cos \alpha \quad (27)$$

整个有限体在 x 方向的合力, 应由如下的二重积分求得:

$$P_x = 2 \int_{\phi_0}^{\phi_n} \int_0^{d\theta} q_r R d\phi r_\phi d\alpha \cdot \cos \alpha \quad (28)$$

将 $r_\phi = R \cdot \sin \phi$ 及式(24)代入, 并考虑到(2)和(5)式, 积分得:

$$\begin{aligned} P_x &= 2 \int_{\phi_0}^{\phi_n} \int_0^{d\theta} q \cdot \sin \phi \cdot R \cdot R \sin \phi \cdot \cos \alpha d\phi d\alpha \\ &= qR^2 \left[\phi_n - \phi_0 + \frac{1}{2} (\sin 2\phi_0 - \sin 2\phi_n) \right] \sin A \quad (29) \end{aligned}$$

(5) 力平衡校核式

在所截有限隔离体上全部的内力和外力必须满足下面的两个平衡条件:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} N_x^T \phi + N_x^Q \phi + N_x^T \theta + P_x = 0 \\ N_x^T \phi + N_x^Q \phi + P_y = 0 \end{cases} \quad (30)$$

其中 P_x 、 P_y 视不同荷载选用不同公式。

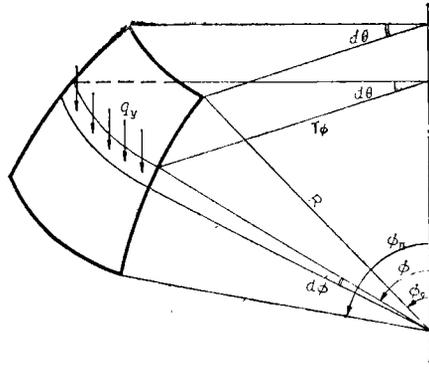


图 10

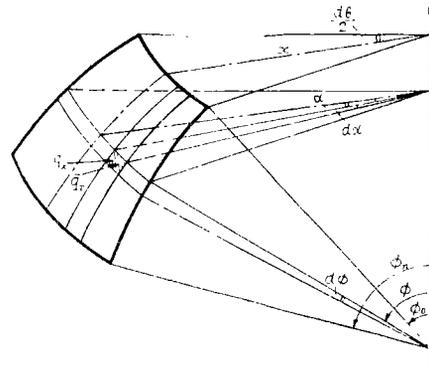


图 11

2. 力矩平衡校核

在做力矩平衡校核时，我们选择通过上截面中心点 a 的环向切线 at （见图 2）作为力矩轴，所有各内、外力均对该轴取矩，考查力矩是否平衡，并令 $M_{at}^{T_\phi}$ 、 $M_{at}^{T_\theta}$ ……分别代表内力 T_ϕ 、 T_θ 对 at 轴的力矩。力矩的方向规定逆时针旋转为正。

(1) 求 $M_{at}^{T_\phi}$

在求 $N_x^{T_\phi}$ 时，已经将作用在 ds_n 弧段上的径向力 T_{ϕ_n} 全部投影到径向线 ab 平面内，因而它们在 at 轴上的力矩如图 12 所示，这就很容易写出：

$$\begin{aligned} M_{at}^{T_{\phi_n}^x} &= N_x^{T_{\phi_n}} \cdot h \\ &= N_x^{T_{\phi_n}} \cdot R(\cos \phi_0 - \cos \phi_n) \end{aligned}$$

将 (6) 式的 $N_x^{T_{\phi_n}}$ 代入，则

$$M_{at}^{T_{\phi_n}^x} = -2R^2 T_{\phi_n} \cdot \cos \phi_n \cdot \sin \phi_0 (\cos \phi_0 - \cos \phi_n) \sin A \quad (31)$$

式 (31) 就是作用在下截面弧段 ds_n 上的径向力 T_{ϕ_n} 的水平分量 $T_{\phi_n}^x$ 对 at 轴的全部力矩，然而 T_{ϕ_n} 的垂直分量 $T_{\phi_n}^y$ 对 at 轴的总力矩 $M_{at}^{T_{\phi_n}^y}$ 却不能这样直接写出，我们必须先求出沿弧段 ds_n 上各点的 $T_{\phi_n}^y$ ，在自身径向平面内对上截面相应点环

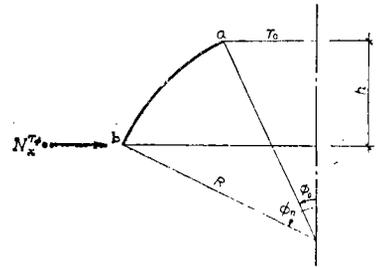


图 12

向切线的力矩 $M_{\phi_0}^{T_{\phi_n}^y}$ ，然后再求出这些力矩对 at 轴

的分量之和 $M_{at}^{T_{\phi_n}^y}$ 。参考图 3 可以写出：

$$M_{\phi_n}^{T_{\phi_n}^y} = T_{\phi_n} \sin \phi_n \cdot r_{\phi_n} da R (\sin \phi_n - \sin \phi_0) \quad (32)$$

将 $r_{\phi_n} = R \sin \phi_n$ 代入，由图 13 可知该力矩在 at 轴上的分量应为：

$$M_{\phi_n}^{T_{\phi_n}^y} \cdot \cos \alpha = T_{\phi_n} \cdot R^2 \sin^2 \phi_n (\sin \phi_n - \sin \phi_0) \cos \alpha da \quad (33)$$

做如下的定积分，并考虑到 (2) 和 (5) 式，即得 $T_{\phi_n}^y$ 在 at 轴上的总力矩：

$$M_{at}^{T_{\phi_n}^y} = 2 \int_0^{\frac{d\theta}{2}} T_{\phi_n} R^2 \sin^2 \phi_n (\sin \phi_n - \sin \phi_0) \cos \alpha da$$

$$= 2R^2 T_{\phi_n} \sin^2 \phi_n (\sin \phi_n - \sin \phi_0) \sin A \quad (34)$$

合并(31)和(34)式, 可得作用在下断面上的径向力 T_{ϕ_n} 对 at 轴的总力矩:

$$M_{at}^{T_{\phi_n}} = 2R^2 T_{\phi_n} \sin \phi_n \left[\sin \phi_n (\sin \phi_n - \sin \phi_0) - \cos \phi_n (\cos \phi_0 - \cos \phi_n) \right] \sin A \quad (35)$$

下面再求上截面作用的径向力 T_{ϕ_0} 对 at 轴的力矩。

由于 T_{ϕ_0} 在 x 方向的分量 $T_{\phi_0}^x$ 与 at 轴在同一平面内, 所以对 at 轴没有力矩作用, 即 $M_{at}^{T_{\phi_0}^x} = 0$, 而 y 方向的分量

$T_{\phi_0}^y$ 对 at 轴的力矩如图14所示, 可以写出:

$$M_{at}^{T_{\phi_0}^y} = 2 \int_0^{\frac{d\theta}{2}} T_{\phi_0}^y \cdot r_0 \, d\alpha \cdot r_0 (1 - \cos \alpha)$$

将 $r_0 = R \cdot \sin \phi_0$ 代入并积分, 同时考虑(2)及(5)式得:

$$M_{at}^{T_{\phi_0}^y} = 2R^2 \cdot \sin^2 \phi_0 \cdot T_{\phi_0}^y (A - \sin A) \quad (36)$$

将 $T_{\phi_0}^y = T_{\phi_0} \cdot \sin \phi_0$ 代入, 则

$$M_{at}^{T_{\phi_0}^y} = 2R^2 \cdot T_{\phi_0} \cdot \sin^3 \phi_0 (A - \sin A) \quad (37)$$

合并(35)和(37)式, 可得:

$$M_{at}^{T_{\phi}} = 2R^2 \left\{ T_{\phi_0} \cdot \sin^3 \phi_0 (A - \sin A) + T_{\phi_n} \sin \phi_n \cdot \left[\sin \phi_n (\sin \phi_n - \sin \phi_0) - \cos \phi_n (\cos \phi_0 - \cos \phi_n) \right] \cdot \sin A \right\} \quad (38)$$

式(38)就是作用在隔离体上全部径向力 T_{ϕ} 对 at 轴的力矩。

(2) 求 $M_{at}^{Q_{\phi}}$

与求 $M_{at}^{T_{\phi}}$ 时一样, 可以写出:

$$M_{at}^{Q_{\phi_n}^x} = N_x^{Q_{\phi_n}} \cdot R \cdot (\cos \phi_0 - \cos \phi_n)$$

将(10)式代入, 则

$$M_{at}^{Q_{\phi_n}^x} = 2R^2 Q_{\phi_n} \cdot \sin^2 \phi_n (\cos \phi_0 - \cos \phi_n) \cdot \sin A \quad (39)$$

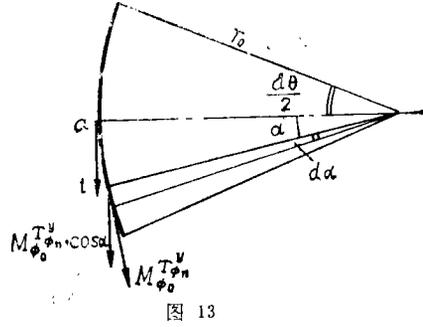


图 13

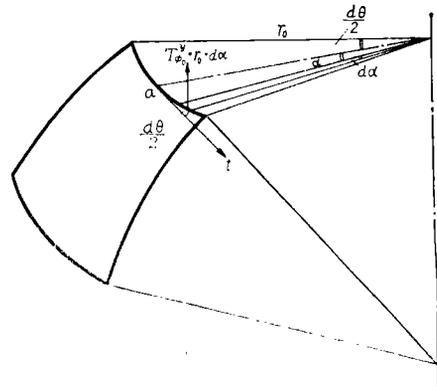


图 14

在求 $M_{at}^{Q_{\phi_n}^y}$ 以前, 同样必须先求出沿下断面弧长 ds_n 上各点的 $Q_{\phi_n}^y$ 在自身的经向平面内, 对上截面相应点的环向切线力矩 $M_{\phi_0}^{Q_{\phi_n}^y}$, 然后再求出这些力矩对 at 轴的分量之和 $M_{at}^{Q_{\phi_n}^y}$ 。

参照图5和图6, 可以写出:

$$M_{\phi_0}^{Q_{\phi_n}^y} = Q_{\phi_n} \cdot \cos \phi_n \cdot R \sin \phi_n \cdot d\alpha \cdot R (\sin \phi_n - \sin \phi_0) \quad (40)$$

参考图13, 可知该力矩在 at 轴上的分量为:

$$M_{\phi_0}^{Q_{\phi_n}^y} \cdot \cos \alpha = Q_{\phi_n} \cdot R^2 \cos \phi_n \cdot \sin \phi_n (\sin \phi_n - \sin \phi_0) \cdot \cos \alpha d\alpha$$

做如下的定积分, 并考虑(2)和(5)式, 即得 $Q_{\phi_n}^y$ 在 at 轴上的总力矩:

$$\begin{aligned} M_{at}^{Q_{\phi_n}^y} &= 2 \int_0^{\frac{d\theta}{2}} Q_{\phi_n} \cdot R^2 \cos \phi_n \cdot \sin \phi_n (\sin \phi_n - \sin \phi_0) \cdot \cos \alpha d\alpha \\ &= 2R^2 Q_{\phi_n} \cdot \cos \phi_n \cdot \sin \phi_n (\sin \phi_n - \sin \phi_0) \sin A \end{aligned} \quad (41)$$

合并(39)与(41)式, 可得作用在下断面的横剪力 Q_{ϕ_n} 对 at 轴的总力矩:

$$\begin{aligned} M_{at}^{Q_{\phi_n}} &= M_{at}^{Q_{\phi_n}^x} + M_{at}^{Q_{\phi_n}^y} \\ &= 2R^2 Q_{\phi_n} \left[\sin^2 \phi_n (\cos \phi_0 - \cos \phi_n) + \cos \phi_n \cdot \sin \phi_n \right. \\ &\quad \left. \cdot (\sin \phi_n - \sin \phi_0) \right] \sin A \end{aligned} \quad (42)$$

上截面的 Q_{ϕ_0} 同径向力 T_{ϕ_0} 一样, 也是只有 y 方向的分量对 at 轴有矩, 参照图14和式(36)

用推求 $M_{at}^{T_{\phi_0}^y}$ 完全同样的方法可得:

$$M_{at}^{Q_{\phi_0}^y} = 2R^2 \cdot \sin^2 \phi_0 \cdot Q_{\phi_0}^y (A - \sin A)$$

将 $Q_{\phi_0}^y = Q_{\phi_0} \cdot \cos \phi_0$ 代入, 则

$$M_{at}^{Q_{\phi_0}^y} = 2R^2 \cdot \sin^2 \phi_0 \cdot \cos \phi_0 \cdot Q_{\phi_0} (A - \sin A) \quad (43)$$

合并(42)和(43)式, 即得:

$$\begin{aligned} M_{at}^{Q_{\phi}} &= 2R^2 \left\{ Q_{\phi_0} \sin \phi_0 \cdot \cos \phi_0 (A - \sin A) + Q_{\phi_n} \left[\sin^2 \phi_n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot (\cos \phi_0 - \cos \phi_n) + \cos \phi_n \cdot \sin \phi_n (\sin \phi_n - \sin \phi_0) \right] \cdot \sin A \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

(3) 求 $M_{at}^{T_0}$

T_0 是沿径向线作用的环向力, 如图15a, 自球壳内由相邻经线 CA 和 CB 切出有限体, 其中0、1、2、3为计算时沿经向的分段点。 T_{0m} ($m=0, 1, 2, \dots$) 为解出的各点的环

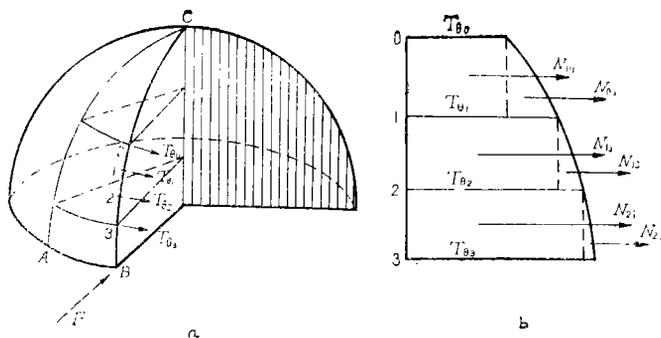


图 15

向内力。图15b为有限体上CB截面的环向内力图。

T_{θ} 沿整个弧长的总和，显然可以通过数值积分的梯形法则求得。但是为了求矩的方便，在求和时将每个梯形又分做一个矩形和一个三角形，各部分的合力如图15b所示，分别为：

$$\begin{aligned}
 N_{0j} &= T_{\theta_0} \cdot (S_1 - S_0) & N_{0s} &= \frac{1}{2} (T_{\theta_1} - T_{\theta_0}) (S_1 - S_0) \\
 N_{1j} &= T_{\theta_1} \cdot (S_2 - S_1) & N_{1s} &= \frac{1}{2} (T_{\theta_2} - T_{\theta_1}) (S_2 - S_1) \\
 N_{2j} &= T_{\theta_2} \cdot (S_3 - S_2) & N_{2s} &= \frac{1}{2} (T_{\theta_3} - T_{\theta_2}) (S_3 - S_2) \\
 &\vdots & & \vdots \\
 N_{mj} &= T_{\theta_m} (S_{m+1} - S_m) & N_{ms} &= \frac{1}{2} (T_{\theta_{m+1}} - T_{\theta_m}) (S_{m+1} - S_m)
 \end{aligned} \tag{45}$$

其中 S_m 为自0点量至m点的弧长， $S_0 = 0$ 。

在所截隔离体上，这些力在x方向的投影可以参照图7和式(14)写出如下：

$$\begin{aligned}
 N_{mj}^x &= 2 N_{mj} \cdot \sin \frac{d\theta}{2} \\
 &= 2 T_{\theta_m} (S_{m+1} - S_m) \cdot \sin \frac{d\theta}{2} \\
 N_{ms}^x &= 2 N_{ms} \cdot \sin \frac{d\theta}{2} \\
 &= (T_{\theta_{m+1}} - T_{\theta_m}) (S_{m+1} - S_m) \cdot \sin \frac{d\theta}{2} \\
 (m = 0, 1, 2, \dots, n-1) & \tag{46}
 \end{aligned}$$

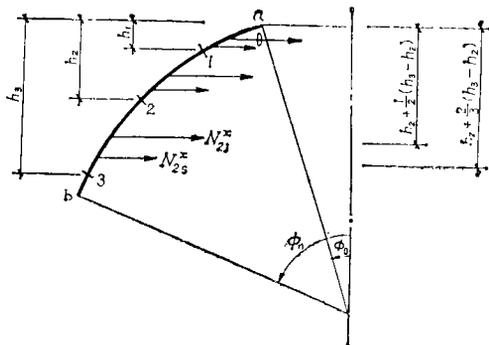


图 16

式(46)各合力的作用点及其距at轴的力臂，示于图16。

各力对at轴的力矩可以写为：

$$M_{at}^{T_\theta} = \sum_{m=0}^{n-1} N_{mj}^x \cdot \left[h_m + \frac{1}{2}(h_{m+1} - h_m) \right] + \sum_{m=0}^{n-1} N_{ms}^x \cdot \left[h_m + \frac{2}{3}(h_{m+1} - h_m) \right] \quad (h_0 = 0) \quad (47)$$

将 (39) 式代入, 并考虑到

$$h_m = R(\cos\phi_0 - \cos\phi_m) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (48)$$

可得

$$M_{at}^{T_\theta} = \frac{R}{3} \sum_{m=0}^{n-1} (S_{m+1} - S_m) \left[T_{\theta m} (3\cos\phi_0 - 2\cos\phi_m - \cos\phi_{m+1}) + T_{\theta m+1} (3\cos\phi_0 - \cos\phi_m - 2\cos\phi_{m+1}) \right] \cdot \sin A \quad (49)$$

式 (49) 就是环向力 T_θ 对 at 轴的总力矩。

(4) 求 $M_{at}^{M_\phi}$

在隔离体上下边界作用的径向力矩 M_ϕ , 是作用于径向平面内的。当对 at 轴取矩时, 处于不同径向平面的 M_ϕ , 对 at 轴的力矩分量也不同, 如图 17 所示。 i 点作用的径向力矩 M_{ϕ_0} 在 t 轴的方向有一个分量为 $M_{\phi_0} \cdot \cos\alpha$, 为此, 在隔离体上边界作用的 M_{ϕ_0} 对 at 轴的总力矩为:

$$\begin{aligned} M_{at}^{M_{\phi_0}} &= 2 \int_0^{\frac{d\theta}{2}} M_{\phi_0} \cdot \cos\alpha \cdot r_0 d\alpha \\ &= 2 \int_0^{\frac{d\theta}{2}} M_{\phi_0} \cdot \cos\alpha \cdot R \sin\phi_0 d\alpha \\ &= 2M_{\phi_0} R \sin\phi_0 \cdot \sin A \end{aligned} \quad (50)$$

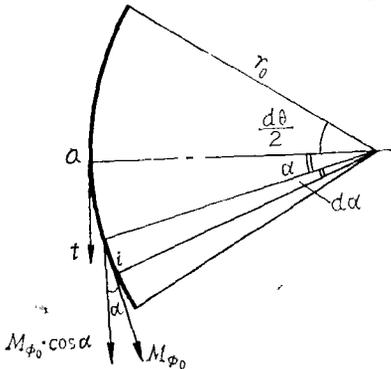


图 17

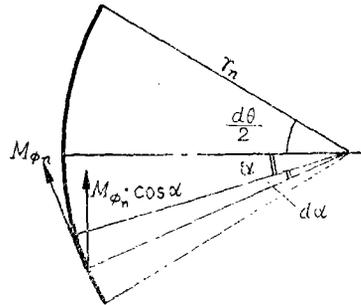


图 18

同样, 对于下边界作用的 M_{ϕ_n} 如图 18 所示, 可以写出 $M_{at}^{M_{\phi_n}}$ 的表达式如下:

$$M_{at}^{M_{\phi_n}} = -2 \int_0^{\frac{d\theta}{2}} M_{\phi_n} \cdot \cos\alpha \cdot r_n \cdot d\alpha$$

前面的负号表示 M_{ϕ_n} 为顺时针旋转的力矩, 与规定的正方向相反, 将 $r_n = R \cdot \sin\phi_n$ 代入积分, 并考虑到 (2) 式,

$$\begin{aligned}
 \text{则} \quad M_{at}^{M_{\phi_n}} &= -2 \int_0^{\frac{d\theta}{2}} M_{\phi_n} \cdot R \cdot \sin \phi_n \cdot \cos \alpha \, d\alpha \\
 &= -2R \cdot \sin \phi_n \cdot M_{\phi_n} \cdot \sin A
 \end{aligned} \tag{51}$$

合并 (50) 和 (51) 式即得径向力矩 M_ϕ 对 at 轴的总力矩为:

$$M_{at}^{M_\phi} = 2R(M_{\phi_0} \cdot \sin \phi_0 - M_{\phi_n} \cdot \sin \phi_n) \cdot \sin A \tag{52}$$

(5) 求 M_{at}^P

如 1.(4) 中所述, 外荷载对 at 轴的力矩也应有下述两种情况。

a. 均布竖向荷载 q_y 对 at 轴的力矩 $M_{at}^{q_y}$

壳面不同点的竖向荷载集度 q_y 对 at 轴的力矩均不相同, 推求的思路, 如图 19 所示。先求出 q_y 在所在径向平面内对上截面环向切线的力矩 $M_{\phi_0}^{q_y}$, 然后再求 $M_{\phi_0}^{q_y}$ 在 at 轴上的分量。由图 19 可以看出, 作用在画阴影线的小块微体上的竖向荷载, 对上截面环向切线的力矩为:

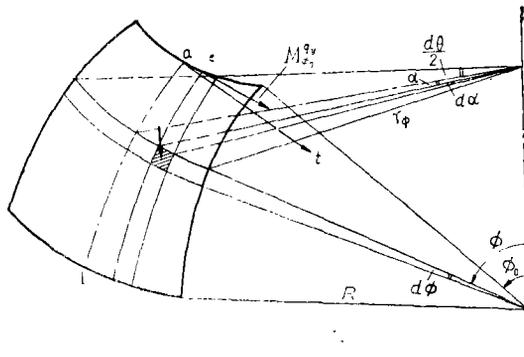


图 19

$$q_y \cdot R \cdot d\phi \cdot r_\phi \cdot d\alpha \cdot R (\sin \phi - \sin \phi_0) \tag{53}$$

两相邻经线切出的微条内的力引起的总力矩:

$$M_{\phi_0}^{q_y} = \int_{\phi_0}^{\phi_n} q_y \cdot R \cdot r_\phi \, d\alpha \cdot R (\sin \phi - \sin \phi_0) \, d\phi \tag{54}$$

$M_{\phi_0}^{q_y}$ 在 at 轴上的投影应为:

$$M_{\phi_0}^{q_y} \cdot \cos \alpha = \int_{\phi_0}^{\phi_n} q_y \cdot R^2 r_\phi \, d\alpha (\sin \phi - \sin \phi_0) \cos \alpha \, d\phi \tag{55}$$

于是沿环向各微条内的力引起的力矩在 at 轴上的投影总量, 可由如下的二重积分得到:

$$\begin{aligned}
 M_{at}^{q_y} &= \sum M_{\phi_0}^{q_y} \cdot \cos \alpha \\
 &= 2 \int_{\phi_0}^{\phi_n} \int_0^{\frac{d\theta}{2}} q_y R^2 r_\phi (\sin \phi - \sin \phi_0) \cos \alpha \, d\phi \, d\alpha
 \end{aligned} \tag{56}$$

将 $r_\phi = R \cdot \sin \phi$ 代入, 并考虑到 (2) 式, 可得:

$$\begin{aligned}
 M_{at}^{q_y} &= 2 \int_{\phi_0}^{\phi_n} \int_0^{\frac{d\theta}{2}} q_y R^3 \cdot \sin \phi (\sin \phi - \sin \phi_0) \cos \alpha \, d\phi \, d\alpha \\
 &= q_y R^3 \left(\phi_n - \phi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\phi_n + 2 \sin \phi_0 \cdot \cos \phi_n \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin 2\phi_0 \right) \sin A
 \end{aligned} \tag{57}$$

b. 均布径向荷载 q 对 at 轴的力矩 M_{at}^q

壳面上任一点的径向荷载 q ，总可以分成式(23)和(24)那样的两个分量。其中竖向分量 q_y 对 at 轴的力矩总量（指整个有限体上各点的竖向分量对 at 轴的力矩，仍采用符号 M_{at}^{py} ）和式(55)一样，只是应将其中的 q_y 代以 $q \cdot \cos \phi$ ，得：

$$M_{at}^{py} = 2 \int_{\phi_0}^{\phi_n} \int_0^{\frac{d\theta}{2}} q \cos \phi R^2 r_\phi (\sin \phi - \sin \phi_0) \cos \alpha \, d\phi d\alpha$$

将 $r_\phi = R \cdot \sin \phi$ 代入并积分，可得：

$$M_{at}^{py} = qR^3 \left[\frac{1}{3} \sin^3 \phi_n - \sin \phi_0 \sin^2 \phi_n + \frac{2}{3} \sin^3 \phi_0 \right] \cdot \sin A \quad (58)$$

水平分量 q_r 对 at 轴的力矩，仍按上述方法，先求 q_r 在自身径向平面内对截面环向切线的力矩 $M_{\phi_0}^{qr}$ ，然后再求 $M_{\phi_0}^{qr}$ 在 at 轴上的分量 M_{at}^{qr} 。

由图20可知，画阴影线的微元内的合力对上截面环向切线的力矩应为：

$$q_r R^2 \sin \phi \, d\phi d\alpha (R \cdot \sin \phi_0 - R \cdot \sin \phi) \quad (59)$$

完全按照推导式(54)和(55)的方法，得出：

$$M_{\phi_0}^{qr} = \int_{\phi_0}^{\phi_n} q_r R^3 \cdot \sin \phi d\alpha (\sin \phi_0 - \sin \phi) d\phi \quad (60)$$

$$M_{\phi_0}^{qr} \cdot \cos \alpha = \int_{\phi_0}^{\phi_n} q_r R^3 \sin \phi \cdot \cos \alpha (\sin \phi_0 - \sin \phi) d\phi d\alpha \quad (61)$$

令水平分量在 at 轴上的总力矩为 M_{at}^{pr} ，则

$$\begin{aligned} M_{at}^{pr} &= \sum M_{\phi_0}^{qr} \cos \alpha \\ &= 2 \int_{\phi_0}^{\phi_n} \int_0^{\frac{d\theta}{2}} q_r R^3 \sin \phi \cdot \cos \alpha (\sin \phi_0 - \sin \phi) d\phi d\alpha \end{aligned} \quad (62)$$

将式(24)代入(62)，并积分，可得：

$$\begin{aligned} M_{at}^{pr} &= 2qR^3 \left\{ \sin \phi_0 \left[\frac{1}{2} (\phi_n - \phi_0) - \frac{1}{4} (\sin 2\phi_n - \sin 2\phi_0) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left[\sin^2 \phi_n \cos \phi_n - \sin^2 \phi_0 \cos \phi_0 \right] + \frac{2}{3} \left[\cos \phi_n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \phi_0 \right] \right\} \sin A \end{aligned} \quad (63)$$

将式(58)与(63)叠加，即得径向荷载 q 对 at 轴的总力矩 M_{at}^p 如下：

$$\begin{aligned} M_{at}^p &= M_{at}^{py} + M_{at}^{pr} \\ &= 2qR^3 \left[\frac{1}{3} \left(\sin^3 \phi_n + \frac{1}{2} \sin^3 \phi_0 \right) + \frac{1}{2} \sin \phi_0 \right. \\ &\quad \left. \cdot (\phi_n - \phi_0 - \sin^2 \phi_n) + \frac{1}{3} \cos \phi_n (2 + \sin^2 \phi_n) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \cos \phi_0 (2 + \sin^2 \phi_0) - \frac{1}{4} (\sin 2\phi_n - \sin 2\phi_0) \right] \cdot \sin A \end{aligned} \quad (64)$$

(6) 力矩平衡校核式

在所截有限体上，全部内力和外力必须满足下面的力矩平衡条件：

$$\sum M_{at} = 0 \quad (65)$$

$$\text{即 } M_{at}^T + M_{at}^Q + M_{at}^T + M_{at}^M + M_{at}^P = 0 \quad (66)$$

当外荷载为均布竖向荷载时， M_{at}^P 由式

(57) 决定，当外荷载为均布径向荷载时，

M_{at}^P 由式 (64) 决定。

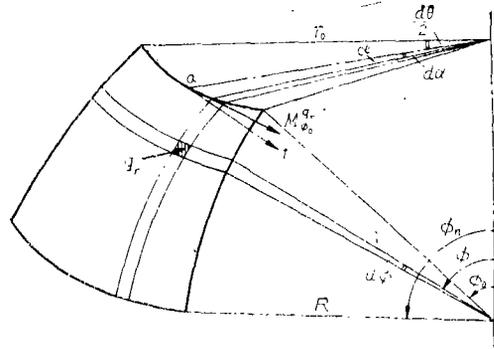


图 20

三、算 例

某地下油罐，如图21所示，球顶承受竖向覆土荷载 q_y ，顶壳、环梁和罐壁相交的结点，作整体计算，按位移法求得边界力，然后按照薄膜解与边界效应解叠加的有矩理论，求得壳面各点的内力。

校核时截取一有限体，如图22所示。已知条件如下：

几何参量： $R = 12.76 \text{ m}$

$$\phi_0 = 26^\circ \quad \phi_1 = 29^\circ$$

$$\phi_2 = 32^\circ \quad \phi_3 = 35^\circ$$

外 载： $q_y = 7,400 \text{ kgf/m}^2$

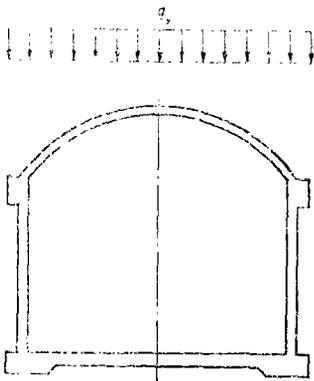


图 21

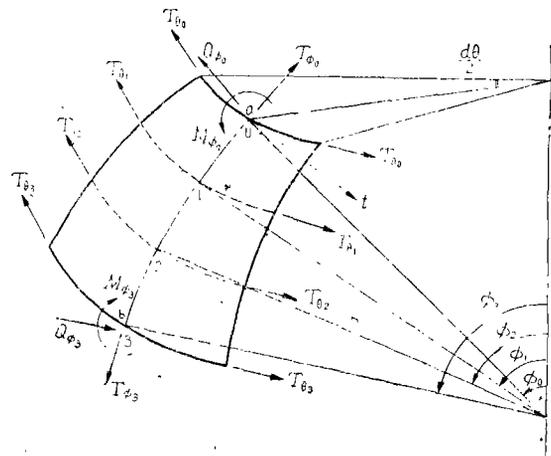


图 22

截取的有限体上的诸内力：

$$T_{\phi_0} = -50,148 \text{ kgf/m}$$

$$Q_{\phi_0} = 205 \text{ kgf/m}$$

$$M_{\phi_0} = 175 \text{ kgf}\cdot\text{m/m}$$

$$T_{\theta_0} = -36,420 \text{ kgf/m}$$

$$T_{\phi_3} = -51,178 \text{ kgf/m}$$

$$Q_{\phi_3} = -510 \text{ kgf/m}$$

$$M_{\phi_3} = 318 \text{ kgf}\cdot\text{m/m}$$

$$T_{\theta_1} = -31,369 \text{ kgf/m}$$

$$T_{\theta_2} = -22,680 \text{ kgf/m} \quad T_{\theta_3} = -9,220 \text{ kgf/m}$$

【解】先校核X方向的平衡：

$$\begin{aligned} N_x^{T\phi} &= R (T_{\phi_0} \sin 2\phi_0 - T_{\phi_3} \sin 2\phi_3) \sin A \\ &= 12.76 (-50148 \times 0.7880107 + 51178 \times 0.9396926) \\ &\quad \times 0.0892686 = 9,766.8502 \quad \text{kgf} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_x^{Q\phi} &= 2R (Q_{\phi_3} \sin^2 \phi_3 - Q_{\phi_0} \sin^2 \phi_0) \sin A \\ &= 2 \times 12.76 [-510 (0.5735764)^2 - 205 \times (0.4383711)^2] \\ &\quad \times 0.0892686 = -471.98288 \quad \text{kgf} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_x^{T\theta} &= \sum_{m=1}^3 (T_{\theta_{m-1}} + T_{\theta_m}) \Delta S_m \cdot \sin A \\ &= - [(36420 + 31369) + (31369 + 22680) \\ &\quad + (22680 + 9220)] \times 0.668112 \times 0.0892686 \\ &= -9,169.1531 \quad \text{kgf} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X &= N_x^{T\phi} + N_x^{T\theta} + N_x^{Q\phi} \\ &= 9766.8502 - 9169.1531 - 471.98288 \\ &= 125.71422 \end{aligned}$$

不平衡误差*：

$$\Delta \delta_x = \frac{125.71422}{9641.136} = 1.3\%$$

壳体工程计算的有矩理论，本身就有多达5%的误差，该不平衡误差小于5%，所以x方向属平衡。

再校核y方向的平衡：

$$\begin{aligned} N_y^{T\phi} &= T_{\phi_3} \frac{\sin^2 \phi_3}{\sin \phi_0} - T_{\phi_0} \sin \phi_0 \\ &= -51178 \times \frac{(0.5735764)^2}{0.4383711} + 50148 \times 0.4383711 \\ &= -16,424.765 \quad \text{kgf} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_y^{Q\phi} &= Q_{\phi_3} \cdot \cos \phi_3 \frac{\sin \phi_3}{\sin \phi_0} - Q_{\phi_0} \cos \phi_0 \\ &= -510 \times 0.819152 \times \frac{0.5735764}{0.4383711} - 205 \times 0.898794 \\ &= -730.8709 \quad \text{kgf} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_y &= \frac{Rqy}{\sin \phi_0} (\cos \phi_0 - \cos \phi_3) \\ &= \frac{12.76 \times 7400}{0.4383711} (0.898794 - 0.819152) \\ &= 17,154.681 \quad \text{kgf} \end{aligned}$$

* 注：这里引用不平衡误差概念，系指不平衡量与x轴上两个方向的合力中较小的一个的比值。

$$\begin{aligned}\sum y &= N_y^T \phi + N_y^Q \phi + P_y \\ &= -16424.765 - 730.8709 + 17154.681 \\ &= -0.9549 \\ \Delta \delta_y &= \frac{0.9549}{17154.7} = 0.0056\% \ll 5\%\end{aligned}$$

所以y方向是平衡的。

最后校核有限体上的力矩平衡：

$$\begin{aligned}M_{at}^T \phi &= 2R^2 \left\{ T_{\phi_0} \sin^3 \phi_0 (A - \sin A) + T_{\phi_3} \sin \phi_3 \cdot \right. \\ &\quad \left. [\sin \phi_3 (\sin \phi_3 - \sin \phi_0) - \cos \phi_3 (\cos \phi_0 - \cos \phi_3)] \cdot \sin A \right\} \\ &= 2 \times 162.8176 \times \{ -50148 \times 0.0842414 \times 0.000119 \\ &\quad - 51178 \times 0.5735764 \times [0.5735764 \times (0.5735764 - 0.4383711) \\ &\quad - 0.819152 \times (0.898794 - 0.819152)] \times 0.0892686 \} \\ &= -10,667.913 \text{ kgf} \cdot \text{m/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{at}^Q \phi &= 2R^2 \left\{ Q_{\phi_0} \sin \phi_0 \cos \phi_0 (A - \sin A) + Q_{\phi_n} [\sin^2 \phi_3 \right. \\ &\quad \left. \cdot (\cos \phi_0 - \cos \phi_3) + \cos \phi_3 \cdot \sin \phi_3 (\sin \phi_3 - \sin \phi_0)] \cdot \sin A \right\} \\ &= 325.6352 \{ 205 \times 0.4383711 \times 0.898794 \times 0.000119 - 510 \\ &\quad \times [0.3289898 \times 0.079642 + 0.4698462 \times 0.135053] \times 0.0892686 \} \\ &= -1,327.0913 \text{ kgf} \cdot \text{m/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{at}^{T_0} &= \frac{R}{3} \sum_{m=0}^{3-1} (S_{m+1} - S_m) [T_{\theta_{n1}} (3 \cos \phi_0 - 2 \cos \phi_m - \cos \phi_{m+1}) \\ &\quad + T_{\theta_{m+1}} (3 \cos \phi_0 - \cos \phi_m - 2 \cos \phi_{m+1})] \sin A \\ &= \frac{R}{3} \cdot \Delta S [T_{\theta_0} (\cos \phi_0 - \cos \phi_1) + T_{\theta_1} (5 \cos \phi_0 - 4 \cos \phi_1 \\ &\quad - \cos \phi_2) + T_{\theta_2} (6 \cos \phi_0 - \cos \phi_1 - 4 \cos \phi_2 \\ &\quad - \cos \phi_3) + T_{\theta_3} (3 \cos \phi_0 - \cos \phi_2 - 2 \cos \phi_3)] \sin A \\ &= 4.253333 \times 0.668112 [-36420 \times 0.0241743 - 31369 \times 0.1474431 - 22680 \\ &\quad \times 0.3067999 - 9220 \times 0.2100299] 0.0892686 \\ &= -3,652.9856 \text{ kgf} \cdot \text{m/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{at}^M \phi &= 2R (M_{\phi_0} \sin \phi_0 - M_{\phi_3} \sin \phi_3) \sin A \\ &= 25.52 (175 \times 0.4383711 - 318 \times 0.5735764) \times 0.0892686 \\ &= -240.75863 \text{ kgf} \cdot \text{m/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{at}^P &= q_y R^3 (\phi_3 - \phi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\phi_3 + 2 \sin \phi_0 \cos \phi_3 - \frac{1}{2} \sin 2\phi_0) \sin A \\ &= 7400 \times 2077.5526 (0.6108652 - 0.4537856 - 0.4698463 +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0.7181851 - 0.3940053) \times 0.892686 \\
& = 15,663.439 \text{ kgf}\cdot\text{m/m} \\
\sum M & = M_{at}^T \phi + M_{at}^Q \phi + M_{at}^T \theta + M_{at}^M \phi + M_{at}^P \\
& = -10093.519 - 1327.0913 - 3652.9856 \\
& \quad - 240.75863 + 15663.439 \\
& = 349.08
\end{aligned}$$

$$\Delta\delta_M = \frac{349.08}{15314.355} = 2.30\% < 5\%$$

所以力矩是平衡的。

参 考 文 献

- [1] S.Timoshenko, S.Woinowsky-krieger: "Theory of Plates and shell", 1959.
 [2] "钢筋混凝土薄壳顶盖及楼盖结构设计计算规范" BJJ6—65, 中国建筑工业出版社, 1965.
 [3] T.V.Karman and M.A.Biot, "Mathematical Methods in Engineering", 1940.

(上接53页)

间变化情况有直接关系, 它综合了正电位幅值比及正电位频次比两个参数特性。所以我们说用腐蚀能量下降率来表达排流效果更全面, 更符合实际。正电位幅值比仅反映了电位数值下降这个侧面, 过去很多情况下用正电位下降的幅度来衡量排流效果往往有片面性。正电位频次比也只是反映了时间变化因素, 腐蚀面积比下降率虽然含有电位数值及时间两个因素, 但是与腐蚀之间缺少一个直接衡量的比例关系。我们用腐蚀能量下降率和正电位面积比及其下降率作为主要因素, 参照其它几种分析因素, 就可对排流效果做出正确的评定。

石棉矿管段排流前后相比较, 腐蚀能量下降率为92.7%, 若把因极性变换周期改变引起的腐蚀能量降低成分考虑在一起, 总腐蚀能量下降率可达96.5%左右。最不利点腐蚀能量下降率为78.79%。排除部分分析计算中的误差, 我们认为一般应为90%左右, 最小不少于75%, 最大可达95%。

在分析中发现, 425号+600米处各项数值均偏小, 该点效果最差, 这说明此种排流方式每组排流能力有限, 若在425号+680米附近再设一组排流装置, 效果会好些。

此外, 牺牲阳极地床电位基本稳定在-1.0V左右, 故极性排流亦可改为直接接地式排流方式, 这样可以进一步降低整个回路的电压降, 增大排流能力。在管道电位小于-1.0V时, 牺牲阳极还可向管道提供部分保护电流, 提高防腐效果。

总之, 我们认为石棉矿区域管道防腐排流效果是较好的, 改良型接地式极性(或直接)排流是经济合理、切实可行的防腐排流方式。对这种排流方式的排流效果, 将在以后的实践中不断地分析、总结和提高, 在进一步搞好该区域管道防腐排流的同时, 为类似的其它区域管道防腐工作积累经验, 提高整个输油管道防腐工作水平。

由于实践经验较少, 理论水平较低, 文中不足之处在所难免, 敬请批评指正。